0.2.3. Coloquio 17/02/04.

Análisis II
Coloquio
Tema 1
17/02/04

---

1. Sea $F(x, y, z) = (-yz, -xz + x, z)$.

(**a**) Hallar $r > 0$ sabiendo que el flujo del rotor de F a través de la semiesfera descripta por $x^2 + y^2 + (z - r)^2 = r^2, z \leq r$, orientada de manera que el normal tenga componente z positiva, es 4π.

(**b**) Calcular la circulación de F a lo largo de la curva de ecuaciones $x^2 + y^2 = r^2, z = r$, orientada de manera que su vector tangente unitario en $(r, 0, r)$ sea $(0, 1, 0)$.

---

2. Sea $F(x, y, z) = (x, y, z)$. Hallar $h > 0$ de manera que el flujo de F hacia el exterior del cilindro descripto por $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 \leq 4, 0 \leq z \leq h$ sea igual al flujo de F hacia el exterior del volumen descripto por $x^2 + y^2 \leq z \leq 2x$.

---

3. Sea $f(x, y) = (x - 2)^2 + y^2$, y sea C la curva descripta por $4x^2 + 9y^2 = 1$.

(**a**) Dibujar aproximadamente C.

(**b**) Hallar y clasificar los extremos de f en C. Interpretar geométricamente.

---

4. Responder a los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

(**a**) Una función continua $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisface $f(x, y) > 3$ cuando $x^2 + y^2 > 1$ y $f(x, y) < 3$ cuando $x^2 + y^2 < 1$. Cuánto vale $f(1, 0)$?

(**b**) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función C^2 tal que $\nabla(f)(1, 1) = (1, 1)$ y $\nabla(f)(-1, -1) = (1, -1)$. Calcular la circulación del campo $F(x, y) = (f''_{xx}(x, y), f''_{xy}(x, y))$ a lo largo de la curva parametrizada por $\sigma(t) = (t, \text{sen}(t\pi/2))$ con t desde -1 a 1.

---

5. Dada la ecuación diferencial $x^2y'' + axy' + by = 3x^2$ $(x > 0)$.

(**a**) Hallar a y b sabiendo que $y(x) = x^2$ es solución de la ecuación y que $y(x) = x$ es solución de la ecuación homógenea asociada.

(**b**) Hallar todas las soluciones que satisfacen $y(1) = y(2) = 0$.

0.2.4. Coloquio 24/02/04.

Análisis II
Coloquio
Tema 1
24/02/04

---

1. Sea $F(x, y, z) = (xy^2 + 3z, x^2y + x, z^2)$. Hallar a de manera que la circulación de F a lo largo del perímetro del triángulo de vértices $(1, 0, 0), (0, 0, 1), (0, a, 0)$, orientado de manera que vaya de $(1, 0, 0)$ hacia $(0, 0, 1)$, sea 6.

---

2. Una rampa de ascenso peatonal responde a la parametrización $X(u, v) = (u\cos(v\pi/2), u\sin(v\pi/2), v)$, $2 \leq u \leq 3, 0 \leq v \leq 4$ (u y v en metros).

(**a**) Dibujar aproximadamente la rampa.

(**b**) Calcular la cantidad de asfalto necesaria para reasfaltar la rampa, si se necesitan dos litros de asfalto para reasfaltar cada metro cuadrado.

---

3. Calcular el flujo del campo $G(x, y, z) = (z + Q(x, y) + x, -P(x, y) - y, x)$ hacia el exterior del cilindro elíptico descripto por $x^2 + y^2/4 \leq 1, 0 \leq z \leq 3$, sabiendo que $F(x, y, z) = (P(x, y), Q(x, y), z)$ es un campo vectorial C^2 en $\mathbb{R}^3$, cuya circulación a lo largo de la elipse de ecuaciones $x^2 + y^2/4 = 1, z = 0$, orientada de manera que su tangente en $(0, 2, 0)$ sea $(-1, 0, 0)$, es 2.

---

4. Responder a los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

(**a**) La superficie S_1 tiene ecuación $-3x^2 + 6x + 2y^2 - z^2 = 4$, y la superficie S_2 está parametrizada por $X(u, v) = (2\cos(u)\sin(v), 2\sin(u)\sin(v), \sqrt{2}\cos(v))$, $0 < u < 2\pi$, $0 < v < \pi$. Mostrar que S_1 y S_2 se cortan ortogonalmente en $(1, 1, 1)$.

(**b**) Sea $f(x, y) = xy$. Mostrar que f alcanza un único extremo en el arco de circunferencia $x^2 + y^2 = 2, x > 0, y > 0$, clasificarlo y hallar su valor.

---

5. La corriente en cada punto (x, y) de la superficie de un canal descripto por $0 < y < 2$ (y en metros) está dada por $V(x, y) = (y^2 + 1, 2xy)$. Si un pato nada perpendicularmente a la corriente, y parte del punto $(1, 2)$, en qué punto alcanza la otra orilla?

0.2.5. Coloquio 02/03/04.

Análisis II
Coloquio
Tema 1
02/03/04

---

1. Sea $F(x, y, z) = (zf'_y(x, y, z) + 2x, -zf'_x(x, y, z) + y, z)$, siendo f un campo escalar C^2 en $\mathbb{R}^3$. Calcular el flujo de F a través de la superficie descripta por $z = 3 - x^2 - y^2 - 2x, 0 \leq z$, orientada de manera que su normal tenga componente z negativa.

---

2. Hallar el punto más lejano del origen en la porción de curva descripta por $x^3+y^3 = 2, 0 \leq x, 0 \leq y$. Justificar.

---

3. Sea C la curva parametrizada por $\sigma(t) = (2a\cos t, \operatorname{sen} t, \cos t), 0 \leq t \leq 2\pi$, orientada de manera que su tangente en $\sigma(t)$ tenga el mismo sentido que la derivada de σ en t. Dado un campo escalar C^2 en $\mathbb{R}^2$ $f(x, y)$, hallar todos los a de manera que el campo vectorial $F(x, y, z) = (f_x(x, y), f_y(x, y) + 2z, z^2)$ tenga circulación 0 a lo largo de C.

---

4. Responder a los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

(**a**) Una porción S de la superficie de una esfera de radio 3 centrada en el origen tiene área 2. ¿Cuánto vale el flujo del campo $F(x, y, z) = (x, y, z)$ a través de S hacia adentro de la esfera?

(**b**) Sean $f(x, y)$ un campo escalar C^2, $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ una parametrización C^1 de la curva de ecuación $f(x, y) = 3$, y $(x_0, y_0) = (x(t_0), y(t_0))$ un punto en esa curva. ¿Cuánto vale $y'(t_0)$ si $\nabla(f)(x_0, y_0) = (3, 1)$ y $x'(t_0) = -1$?

---

5. Hallar una curva en la región $x < 10, y > 10$, que pase por $(1, 11)$, y tal que el punto de intersección de su recta tangente en cada punto (x_0, y_0) con la recta de ecuación $y = 10$ tiene abcisa $-(x_0 - 10)^2 + x_0$.

0.2. Coloquios.

0.2.1. Coloquio 06/07/04.

Análisis II
Coloquio
Tema 1
06/07/04

---

1. Sea $U(x,y,z)$ una función armónica en $\mathbb{R}^3$, y sea

$$F(x,y,z) = (x^3 + U'_x(x,y,z), y^3 + U'_y(x,y,z), z^3 + U'_z(x,y,z))$$

Calcular el flujo de $F(x,y,z)$ a través del borde del cuerpo V descripto por $x^2+y^2+z^2 \leq 8$, $x \geq \sqrt{z^2+y^2}$, hacia el exterior de este volumen.

---

2. Sea S la porción de esfera descripta por $(x-1)^2+y^2+z^2 = 4$, $2x+y \leq 0$, y sea $F(x,y,z) = (2x^3y^4, x^3y^4, 0)$. Mostrar que el flujo de $\nabla \times F$ a través de S orientada con el normal hacia el exterior de la esfera es 0.

---

3. Calcular el área de la proyección sobre el plano yz del cuerpo descripto por $x^2+y^2 \leq 4$, $1 \leq x+z \leq 5$. Graficar.

---

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

(**a**) Sabiendo que la función C^2 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es constante a lo largo de la curva parametrizada por $t \mapsto (1+\cos t, 2), t \in (0, 2\pi)$, calcular $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2)$.

(**b**) Hallar la distancia de la curva de ecuaciones $x^2+y^3 = 1$, $z = 2$ al plano de ecuación $z = 5$.

---

5. La superficie de un canal lleno de agua tiene la forma de la banda

$$-10 \leq y \leq 10, \quad x > 0$$

y la velocidad superficial del agua en (x,y) está dada (independientemente del tiempo, es decir que se trata de un flujo estacionario) por

$$V(x,y) = (x^2(100-y^2), 0)$$

Si a tiempo $t = 0$ se liberan dos corchos en la superficie, uno en el punto $P_1 = (1,1)$ y el otro en el punto $P_2 = (2,3)$: ¿cuál de los corchos llegará antes a la recta de ecuación $x = 10$?

0.2.2. Coloquio 13/07/04.

Análisis II
Coloquio
Tema 1
13/07/04

---

1. Sea

$$F(x, y, z) = (x, z^2 - y, 4z + 1)$$

y sea C la curva borde de la superficie parametrizada por

$$(u, v) \mapsto (2u, v^2, v), \quad u^2 + v^2 \leq 1$$

Calcular la circulación de $F(x, y, z)$ a lo largo de C, orientada de manera de seguir el orden $(2, 0, 0) \mapsto (0, 1, 1) \mapsto (-2, 0, 0)$ en su recorrido.

---

2. Sea, cuando $x^2 + z^2 > 0$,

$$F(x, y, z) = (\frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}} - 2zy, 0, xy - \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}})$$

Mostrar que el flujo de F a través de la superficie descripta por

$$x^2 + z^2 = 4, \quad 1 \leq y \leq 2$$

es igual al flujo de F a través de la superficie descripta por

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25, \quad 1 \leq y \leq 2$$

con la orientación elegida en ambos casos con el normal alejándose del eje y.

---

3. Dada la región R descripta por

$$0 \leq y \leq z - \frac{x^2}{z}, \quad 1 \leq z \leq 2$$

graficar aproximadamente R y calcular

$$\iiint_R z \, dxdydz$$

---

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

(**a**) Graficar aproximadamente la curva en $\mathbb{R}^2$ descripta en coordenadas polares por

$$\rho = 1 + \cos(2\varphi)/2, \quad \varphi \in (0, 2\pi)$$

(**b**) Hallar $c > 0$ y $d > 0$ de manera que el área encerrada por la elipse de ecuación $c^2x^2 + d^2y^2 = 1$ que pasa por $(1, 2)$ sea mínima. (*Nota*: El área encerrada por una elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ es $ab\pi$)

---

5. Hallar todos los puntos de intersección con la recta de ecuación $x = 3$ de la línea de flujo que pasa por $(1, 2)$ del campo $V(x, y) = (-1 + 3y, 2)$.

0.2.3. Coloquio 20/07/04.

61.03 ANÁLISIS MATEMÁTICO II
COLOQUIO 20/07/04
TEMA 1

---

1. Sean $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función C^1, y R la región descripta por

$$x^2 + z^2 \leq 4, \quad h(x,z) - 2 \leq y \leq h(x,z) + 3$$

Dado el campo vectorial $F(x,y,z) = (x, 2, z + 3y)$, calcular el flujo de F a través del borde de R, con el normal orientado hacia adentro de R.

---

2. Calcular el área de la superficie S descripta por

$$y^2 + z^2 = 16, \quad x^2 + y^2 + 8(z-4) \leq 0$$

---

3. Sabiendo que el campo C^2 $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$F(x,y,z) = (P(x,y,z), 2zQ(x,y,z), R(x,y,z) + z^2)$$

satisface $\iint\limits_S (\nabla \times F).\vec{n}\, dS = 4$ siendo S la semiesfera descripta por $x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z \geq 0$ y $\vec{n}$ el normal unitario hacia fuera de la esfera, calcular el flujo del rotor de

$$G(x,y,z) = (-2P(x,y,z), z^3, z^2 - 2R(x,y,z))$$

a través de la superficie descripta por $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4,\ z \leq 0$ con el normal de manera que su coordenada z sea positiva. Justificar.

---

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

(**a**) Sea C una curva en $\mathbb{R}^2$ cerrada y simple. Calcular el área de la región D encerrada por C sabiendo que $\int\limits_C 4y\, dx + 3x\, dy = -3\pi$.

(**b**) Sabiendo que la curva C es una línea de flujo del campo

$$F(x,y,z) = (xz, y, x+z)$$

y que pasa por $P = (1,2,1)$, hallar una ecuación del plano normal a C en P.

---

5. Una solución $y(t)$ (donde t indica el tiempo) de la ecuación diferencial

$$y''(t) + 4y'(t) + 8y(t) = 0$$

describe el desplazamiento vertical respecto a su posición de equilibrio (considerando positivos los desplazamientos hacia abajo) de un cuerpo de masa 1 que sube y baja colgado de un resorte enganchado a un clavo en una pared, rozando con la pared. Sabiendo que en el instante inicial el cuerpo pasa hacia arriba por su posición de equilibrio (es decir que $y(0) = 0$) con velocidad $y'(0) = -1$, calcular la energía cinética ($E_c(t) = \frac{1}{2}m(y'(t))^2$) del cuerpo como función de t. Graficar esta función. (*Nota: suponer que las unidades en este problema se han elegido de manera consistente*)

0.2.4. Coloquio 27/07/04.

61.03 ANÁLISIS MATEMÁTICO II
COLOQUIO 27/07/04
TEMA 1

---

1. Sea C la curva en $\mathbb{R}^3$ parametrizada por

$$t \mapsto (1-\cos(t), 2+\operatorname{sen}(t), 1-\operatorname{sen}(t)+\cos(t)), \quad t \in [0, 2\pi]$$

orientada con t creciente.

(**a**) Hallar la ecuación de un plano que contenga a C.

(**b**) Calcular la circulación a lo largo de C del campo vectorial $F(x,y,z) = (e^{x^2}, x+\operatorname{sen}(y), z^4)$.

---

2. Sea R la región de $\mathbb{R}^3$ descripta por

$$4 \le x^2+y^2+z^2 \le 9, \quad 0 \le z \le x\sqrt{3}$$

(**a**) Graficar aproximadamente R y su proyección sobre el plano zx.

(**b**) Hallar el volumen de R.

---

3. Sea S la porción de esfera descripta por $(x-4)^2+(y-1)^2+z^2 = 25$, $x \le 4$, y sea, para cada $P = (x,y,z) \in S$, $\vec{n}(P) = (a,b,c)$ el vector normal a S unitario y hacia el exterior de la esfera. Calcular la integral de superficie

$$\iint_S (5a - b + 3c)\, dS$$

---

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

(**a**) Sea D una región en $\mathbb{R}^2$ de área 2. Calcular el área de la región

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (2x-y, x+2y) \in D\}$$

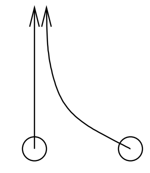
(**b**) Sea C el gráfico de una función C^2 $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(1) = -1$. Sabiendo que la función C^2 $f(x,y)$ restringida a C tiene extremo en $P = (1,-1)$, y que $\nabla(f)(P) = (3,2)$, hallar $g'(1)$.

---

5. Sea $V(x,y) = (10-x, y+1)$ un campo de velocidades. Los centros de dos móviles circulares de radio 1 se mueven según ese campo (es decir que para cada uno de ellos, la velocidad al pasar por un punto (x,y) es $V(x,y)$), partiendo simultáneamente de $P_1 = (10,2)$ y $P_2 = (20, 2+\frac{1}{10})$.

(**a**) Calcular la distancia entre los centros de los móviles en función del tiempo t.

(**b**) Hallar la mínima distancia entre los centros. ¿Chocan entre sí los móviles?



Los móviles y sus trayectorias

0.2.5. Coloquio 03/08/04.

61.03 ANÁLISIS MATEMÁTICO II
COLOQUIO 03/08/04
TEMA 1

---

1. Sea C la curva parametrizada por

$$\varphi \mapsto (\cos(\varphi), \text{sen}(\varphi), \cos(2\varphi)), \quad \varphi \in (0, \pi/4)$$

Calcular la integral de línea

$$\int_C xyz\, ds$$

---

2. Sea S la superficie descripta por

$$(x-3)^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y^2 \le z \le 36$$

Calcular el flujo de $F(x, y, z) = (x, y, 2x^2 + 2y^2)$ a través de S orientada con el normal alejándose del eje $x = 3, y = 0$.

---

3. Sea C_a la circunferencia en el plano $y = 5$ con centro en $(a, 5, 0)$ y de radio 1, orientada de manera que en sus puntos de coordenada x positiva [1] el vector tangente tenga coordenada z negativa. Hallar a de manera que sea máxima la circulación del campo $(x + z + y, x, \frac{x^3}{3})$ a lo largo de C_a.

---

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

(**a**) Sea S una porción de área 2 del plano de ecuación

$$2x + 3y - 2z = 1$$

Calcular el área de la proyección de S sobre el plano yz.

(**b**) Sabiendo que el polinomio de Taylor de grado 2 de una función C^3 $f(x, y)$ en el entorno de $P = (2, 3)$ es

$$p(x, y) = 2 + (x - 2) + 4(y - 3) - (x - 2)(y - 3)$$

calcular la derivada direccional de $g(x, y) = f'_x(x, y)$ en P en la dirección $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

---

5. Hallar la solución $y(t)$ de la ecuación diferencial

$$y''(t) + 4y(t) = \cos(2t)$$

que tiene un máximo de valor 5 en $t = \pi$.

---

[1] debió decir: coordenada x mayor que a

0.2. Coloquios.

0.2.1. Coloquio 07/12/04.

61.03 ANÁLISIS MATEMÁTICO II
COLOQUIO 07/12/04
TEMA 1

---

1. Sea C la curva de ecuaciones

$$z = 3 + x, z = 3x^2 + 4y^2, \quad x \geq 1$$

Calcular la circulación de $F(x, y, z) = (e^{\text{sen}(x)} + yz + xy, y + xz, z)$ a lo largo de C, recorrida de manera que el tangente tenga coordenada y positiva.

---

2. Sea S la superficie descripta por

$$y = x^2, \quad 0 \leq z \leq 1, \quad y \leq 1$$

Dada una función C^2 f calcular el flujo de $F(x, y, z) = (f(y, z), 3y, 0)$ a través de S orientada con el normal de coordenada y positiva.

---

3. Hallar el volumen de la región descripta en coordenadas cilíndricas por

$$\cos(\varphi) \leq \rho \leq 2\cos(\varphi), \quad 0 \leq z \leq 4 - \rho\cos(\varphi)$$

Graficar.

---

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

(**a**) Hallar el máximo absoluto de $f(x, y) = x^2 + x + y^2 + 1$ en la curva de ecuación $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

(**b**) Sea $f(x, y) = y + 1$. Mostrar que el promedio de f sobre la circunferencia de radio 2 centrada en $(0, 0)$ es positivo. (Nota: el *promedio* de una función escalar sobre una curva es la integral de línea de la función a lo largo de la curva dividida por la longitud de la curva)

---

5. Hallar la solución $y(t)$ de la ecuación diferencial

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = 4e^{-t}$$

tal que $y(0) = y(\pi/4) = 0$.

0.2.2. Coloquio 21/12/04.

61.03 ANÁLISIS MATEMÁTICO II
COLOQUIO 21/12/04
TEMA 1

---

1. Sea C la curva de ecuaciones

$$z = x^2, y = 1, 0 \leq x \leq 1$$

y sea $F(x, y, z) = (3x - 2z, y + z, 0)$

(**a**) Graficar C y calcular la circulación de F a lo largo de C, recorrida de manera que el tangente tenga coordenada x positiva.

(**b**) Calcular el flujo del rotor de F a través de la superficie descripta por $y = 1, x^2 \leq z \leq x, 0 \leq x \leq 1$, con el normal de coordenada y negativa.

---

2. Sea S la superficie descripta por la parametrización

$$(u, v) \mapsto (u, u^2 - v^2, v), \quad u^2 + v^2 \leq 4$$

Calcular el área de S.

---

3. Sea S la superficie dada por la ecuación $z = f(x, y), (x, y) \in D$, donde $f(x, y)$ es una función C^2, tal que $f(x, y) > 0$ cuando $x^2 + y^2 < 1$ y $f(x, y) = 0$ cuando $x^2 + y^2 = 1$ y D es el disco descripto por $x^2 + y^2 \leq 1$. Si el flujo de $F(x, y, z) = (x + z^2, 2y, 3z)$ a través de S orientada con el normal con z positiva es 2, hallar

$$\iint_D f(x, y) dx\, dy$$

.

---

4. Responder a cada uno de los siguientes problemas, justificando brevemente su respuesta.

(**a**) Hallar el punto más cercano al origen en la recta de ecuación $3x - 2y = 1$.

(**b**) Sea $f(u, v)$ una función C^2 tal que $\nabla f(u, v) = (2uv - 2v, u^2 - 2u - 1)$. Hallar la derivada direccional $g'((2, 0), (-1, 0))$, siendo $g(x, y) = f(x^2 + 1 + y, -y)$

---

5. Hallar una función $y(t)$ estrictamente positiva, inversamente proporcional a su derivada, y que satisface $y(0) = 2, y'(0) = 3$.